15　関数の連続性

基本問題 ＆ 解法のポイント

25

$x=1$ で連続であるための必要十分条件は，

$f(1)$ がただ 1 つ存在し且つ $f(1)=\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)$ が成り立つことである。

$f(1)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+a+b}{1+2}=\dfrac{a+b+1}{3}$　・・・①

$\lim_{x\to 1-0} f(x)$ について

$0<x<1$ としてよいから，$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+2}+ax^n+b}{x^{2n}+2}=\dfrac{b}{2}$

よって，$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\dfrac{b}{2}$　・・・②

$\lim_{x\to 1+0} f(x)$ について

$x>1$ だから，

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+ax^n+b}{x^{2n}+2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^{2n+2}+ax^n+b}{x^{2n}}}{\dfrac{x^{2n}+2}{x^{2n}}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\dfrac{a}{x^n}+\dfrac{b}{x^{2n}}}{1+\dfrac{2}{x^{2n}}}\\
&=x^2
\end{aligned}
$$

よって，$\lim_{x\to 1+0} f(x)=1$　・・・③

①，②，③より，$\dfrac{a+b+1}{3}=\dfrac{b}{2}=1$

よって，$a=0,\ b=2$

26

$f(x)=ce^x-x$ とおくと，
$f(x)$ は全ての実数 x において連続である。　・・・①

また，$f'(x)=ce^x-1$，$0<c<\frac{1}{e}$ より，$-1<ce^x-1<e^{x-1}-1$

よって，$0\leq x\leq 1$ において，$f'(x)<0$
ゆえに，$f(x)$ は $0\leq x\leq 1$ において単調減少する。　・・・②
$f(0)f(1)=c(ce-1)$

ここで，$0<c<\frac{1}{e}$ より，$-1<ce-1<0$

よって，$f(0)f(1)<0$　・・・③
①，②，③より，$f(x)=0$ すなわち $x=ce^x$ は，0 と 1 の間にただ 1 つの実数解をもつ。

A

87

(1)

$0 \leq x < 1$ のとき

$[x] = 0$ より，　$y = 0$

$1 \leq x < 2$ のとき

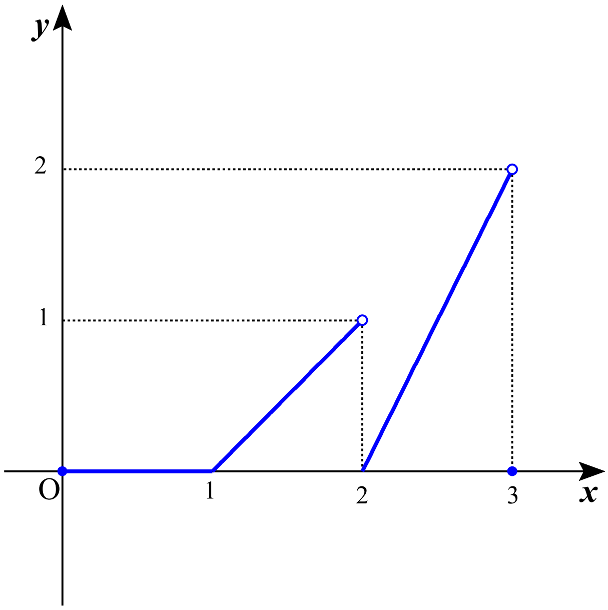
$[x] = 1$ より，　$y = x - 1$

$2 \leq x < 3$ のとき

$[x] = 2$ より，　$y = 2(x-2)$

$x = 3$ のとき

$[x] = 3$ より，　$y = 0$



(2)

$0 \leq x < 1$ のとき

$f(x) = abx$ より，　$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} f(x) = ab$　・・・①

$1 \leq x < 2$ のとき

$f(x) = (1+a)(bx-1)$ より，$f(1) = (1+a)(b-1)$　・・・②　$\displaystyle\lim_{x \to 2-0} f(x) = (1+a)(2b-1)$　・・・③

$2 \leq x < 3$ のとき

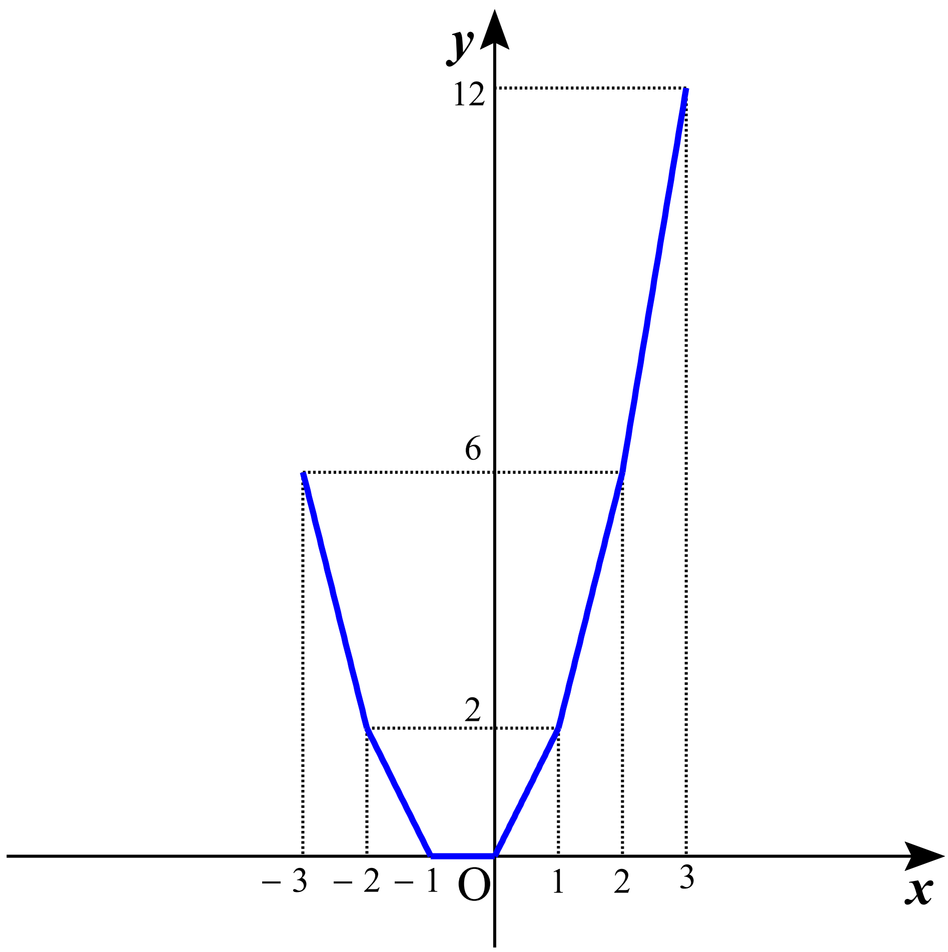
$f(x) = (2+a)(bx-2)$ より，　$f(2) = (2+a)(2b-2)$　・・・④

$x = 1$ で連続となるとき

①＝②より，　$ab = (1+a)(b-1)$　$\therefore a - b = -1$　・・・⑤

$x = 2$ で連続となるとき

③＝④より，$(1+a)(2b-1)=(2+a)(2b-2)$　$\therefore a-2b=-3$　・・・⑥
したがって，$x=1$ と $x=2$ で連続となるとき，⑤かつ⑥より，$a=1,\ b=2$　・・・(答)
よって，$f(x)=([x]+1)(2x-[x])$
$-3 \le x < -2$ のとき
$f(x)=-2(2x+3)$
$-2 \le x < -1$ のとき
$f(x)=-(2x+2)$
$-1 \le x < 0$ のとき
$f(x)=0$
$0 \le x < 1$ のとき
$f(x)=2x$
$1 \le x < 2$ のとき
$f(x)=2(2x-1)$
$2 \le x < 3$ のとき
$f(x)=3(2x-2)$
$f(3)=12$



88

(1)

$|x|<1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}=-x^2+bx+c$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=-1+b+c$　・・・①　$\displaystyle\lim_{x\to -1+0}f(x)=-1-b+c$　・・・②

$|x|>1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\dfrac{1}{x^{2n-3}}+\dfrac{b}{x^{2n-2}}+\dfrac{c}{x^{2n-1}}}{x+\dfrac{1}{x^{2n-1}}}$$

$$=\frac{a}{x}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x)=a$　・・・③　$\displaystyle\lim_{x\to -1-0}f(x)=-a$　・・・④

また，$f(1)=\dfrac{a+b+c-1}{2}$　・・・⑤　$f(-1)=\dfrac{-a-b+c-1}{2}$　・・・⑥

したがって，$f(x)$ が x の連続関数となるためには,

$x=1,\ -1$ において $f(x)$ が連続であればよい。

すなわち $f(1)=\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)$ かつ $f(-1)=\displaystyle\lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}f(x)$ が成り立てばよい。

$f(1)=\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)$ が成り立つとき

①，③，⑤より，$\dfrac{a+b+c-1}{2}=-1+b+c=a$　$\therefore a-b-c=-1$　・・・⑦

$f(-1)=\displaystyle\lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}f(x)$ が成り立つとき

②，④，⑥より，$\dfrac{-a-b+c-1}{2}=-a=-1-b+c$　$\therefore a-b+c=1$　・・・⑧

⑦かつ⑧より，$a=b,\ c=1$　・・・(答)

(2)

(1)より，

$|x|<1$ のとき

$f(x)=-x^2+ax+1$ すなわち $f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+1$

$|x|>1$ のとき

$f(x)=\frac{a}{x}$

また，$f(1)=a$，$f(-1)=-a$

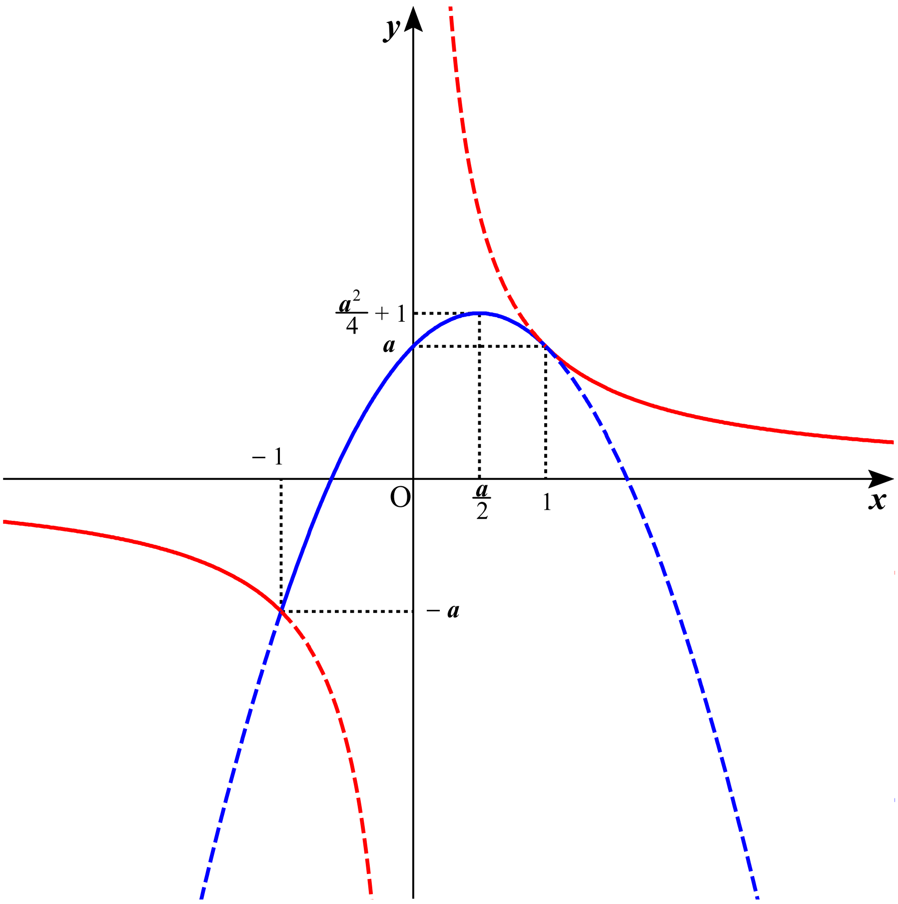
よって，

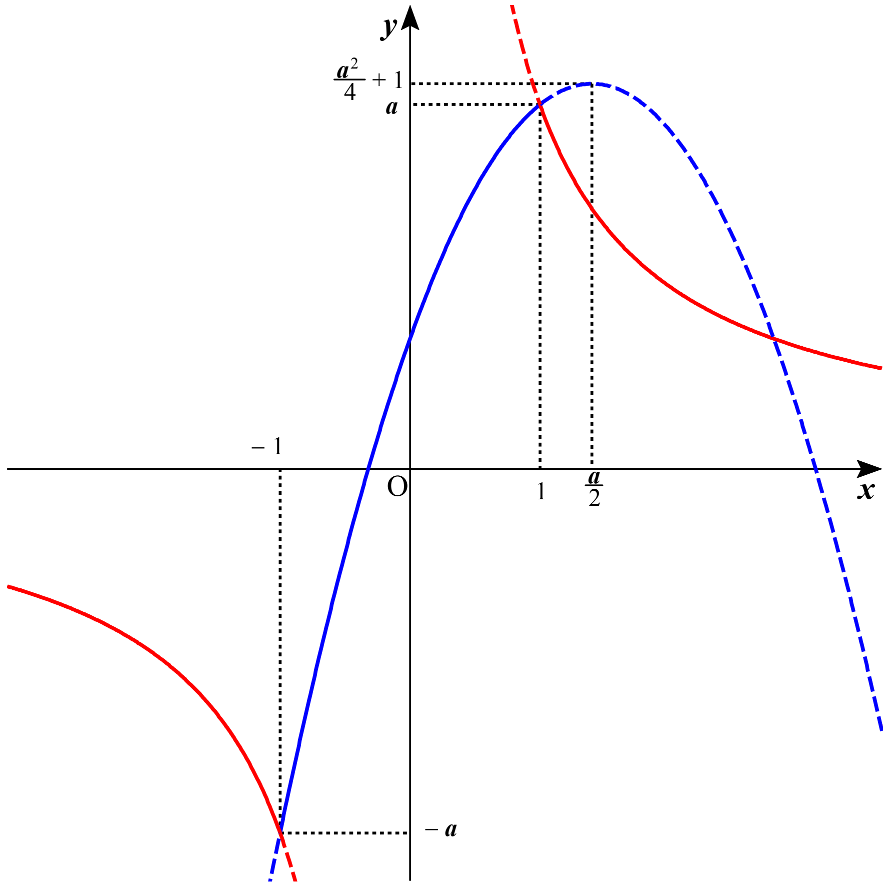
$0<\frac{a}{2}\leq 1$ のとき，すなわち $0<a\leq 2$ のとき

$x=\frac{a}{2}$ で最大値 $\frac{a^2}{4}+1$ をとる。

$\frac{a}{2}>1$ のとき，すなわち $a>2$ のとき

$x=1$ で最大値 a をとる。





(3)

$0 < a \leq 2$ のとき

$\frac{a^2}{4}+1=\frac{5}{4}$ より，$0 < a \leq 2$ を満たすのは $a=1$

したがって，(1)より，$a=1,\ b=1,\ c=1$

$a > 2$ のとき

$a=\frac{5}{4}$ となり，$a > 2$ を満たさない。

よって，不適

以上より，$a=1,\ b=1,\ c=1$

89

$g(x)=f(x)-x$ とおくと，

$g(x)$ はすべての実数 x において連続である。　・・・①

また，

$$g(1)g(-1)=(a+b-1)(a+b+1)$$
$$=(a+b)^2-1$$
$$=|a+b|^2-1$$

これと $|a+b|^2\leq(|a|+|b|)^2$，$|a|+|b|\leq 1$ より，

$g(1)g(-1)\leq 0$（等号成立は自然数 $a,\ b$ が $a+b=1$ を満たすとき）が成り立つ。

次に，$g(x)=0$ すなわち $f(x)=x$ の解の範囲について調べる。

$g(1)=0$ のとき

　$x=1$ が $f(x)=x$ の解である。

$g(-1)=0$ のとき

　$x=-1$ が $f(x)=x$ の解である。

$g(1)g(-1)<0$ のとき

　中間値の定理より，$-1<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解が存在する。

以上より，$f(x)=x$ の解で，$-1\leq x\leq 1$ の範囲にあるものが存在する。

B

90

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\cos x)^{n-1}-(\cos x)^{n+k-1}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{(\cos x)^{m-1}-(\cos x)^{m+k-1}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{1-(\cos x)^{k}\right\}(\cos x)^{m-1}$$

より，級数が収束するための条件は

$|\cos x|<1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\cos x)^{n-1}-(\cos x)^{n+k-1}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{1-(\cos x)^{k}\right\}(\cos x)^{m-1}$$
$$=\left\{1-(\cos x)^{k}\right\}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\cos x)^{n}}{1-\cos x}$$
$$=\frac{1-(\cos x)^{k}}{1-\cos x}$$

よって，級数は任意の自然数 k に対し収束する。

$\cos x=1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\cos x)^{n-1}-(\cos x)^{n+k-1}\right\}=0$$

よって，級数は任意の自然数 k に対し収束する。

$\cos x=-1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\cos x)^{n-1}-(\cos x)^{n+k-1}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{1-(-1)^{k}\right\}(-1)^{m-1}$$
$$=\left\{1-(-1)^{k}\right\}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^{n}}{1-(-1)}$$
$$=\left\{1-(-1)^{k}\right\}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^{n}}{2}$$

より，

k が奇数のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\cos x)^{n-1}-(\cos x)^{n+k-1}\right\}=\left\{1-(-1)^{k}\right\}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^{n}}{2}$$
$$=\{1-(-1)\}\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^{n}}{2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{1-(-1)^{n}}{2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{1-(-1)^{n}\right\}$$

したがって，級数は振動する。すなわち収束しない。

k が偶数のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(\cos x)^{n-1}-(\cos x)^{n+k-1}\right\}=\left\{1-(-1)^k\right\}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}$$
$$=(1-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}0\cdot\frac{1-(-1)^n}{2}$$
$$=0$$

したがって，級数は 0 に収束する。

以上より，級数が収束するための条件は自然数 k が偶数であることである

(2)

$f(0)$ について

$x=0$ ならば $\cos x=1$ だから，(1)より，$f(x)=0$　$\therefore f(0)=0$　・・・①

$x\neq 0$ のとき

$|\cos x|<1$ だから，(1)より，

$$f(x)=\frac{1-(\cos x)^k}{1-\cos x}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}(\cos x)^{i-1}$$
$$=1+\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{k-1}x$$

あるいは

$$f(x)=\frac{1-(\cos x)^k}{1-\cos x}$$
$$=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{k-1}x)}{1-\cos x}$$
$$=1+\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^{k-1}x$$

よって，$\lim_{x\to 0}f(x)=k$

k は自然数だから，$\lim_{x\to 0}f(x)>0$　・・・②

①，②より，$f(0)\neq\lim_{x\to 0}f(x)$

よって，$f(x)$ は $x=0$ で連続でない。

91

(1)

$f'(x)$の条件より，C_1, C_2を定数とすると，$f(x)=\begin{cases} x^2+C_1 & (0<x<1) \\ ax+C_2 & (1<x<2) \end{cases}$

関数$f(x)$は連続だから，

$f(0)=\lim_{x\to+0} f(x)$，　$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1+0} f(x)$，　$f(2)=\lim_{x\to2-0} f(x)$が成り立つ。

また，　$f(x+2)=f(x), f(0)=0$より，　$f(2)=f(0+2)=f(0)=0$

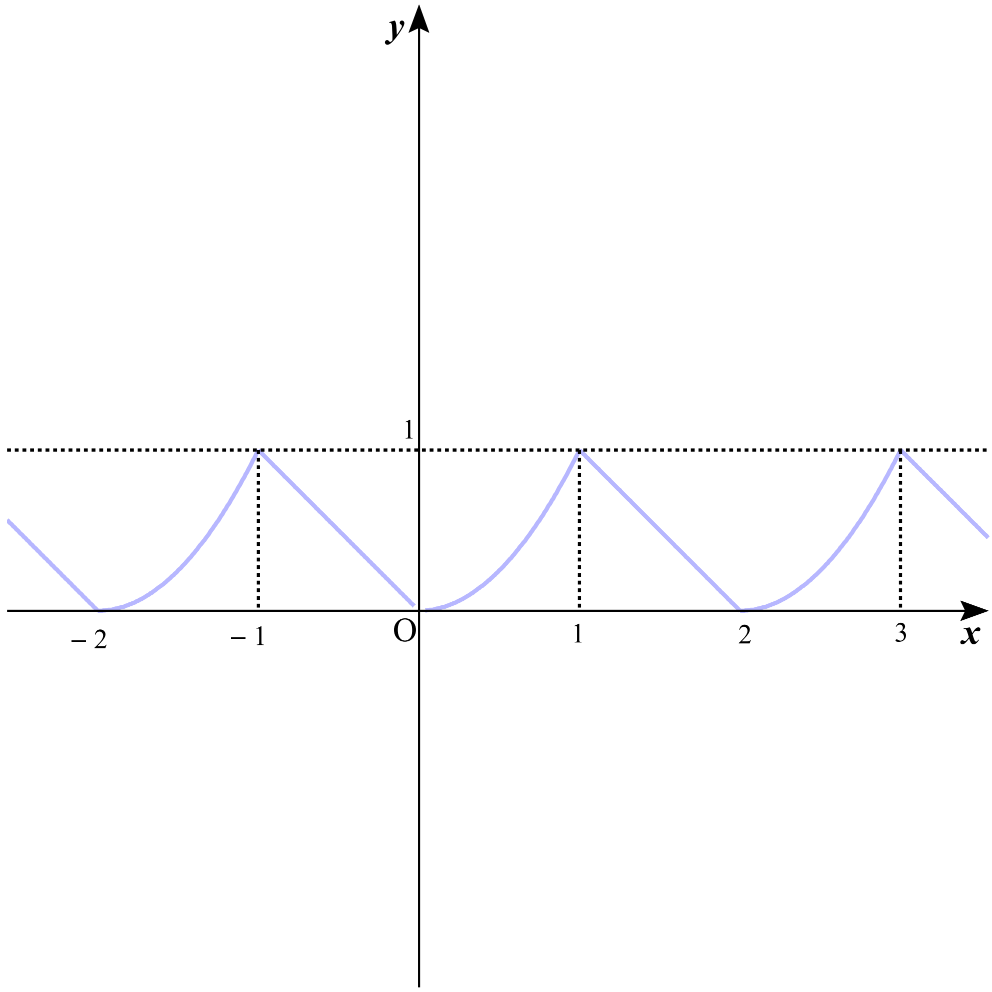
よって，　$0=C_1$，　$1+C_1=a+C_2$，　$0=2a+C_2$

これを解くと，　$a=-1, C_1=0, C_2=2$

ゆえに，　$f(x)=\begin{cases} x^2 & (0\le x\le1) \\ -x+2 & (1\le x\le2) \end{cases}$

これと，　$f(x)=f(x+2)$より，　$f(x)$は周期 2 の関数であることから，

$y=f(x)$のグラフは下図のようになる。



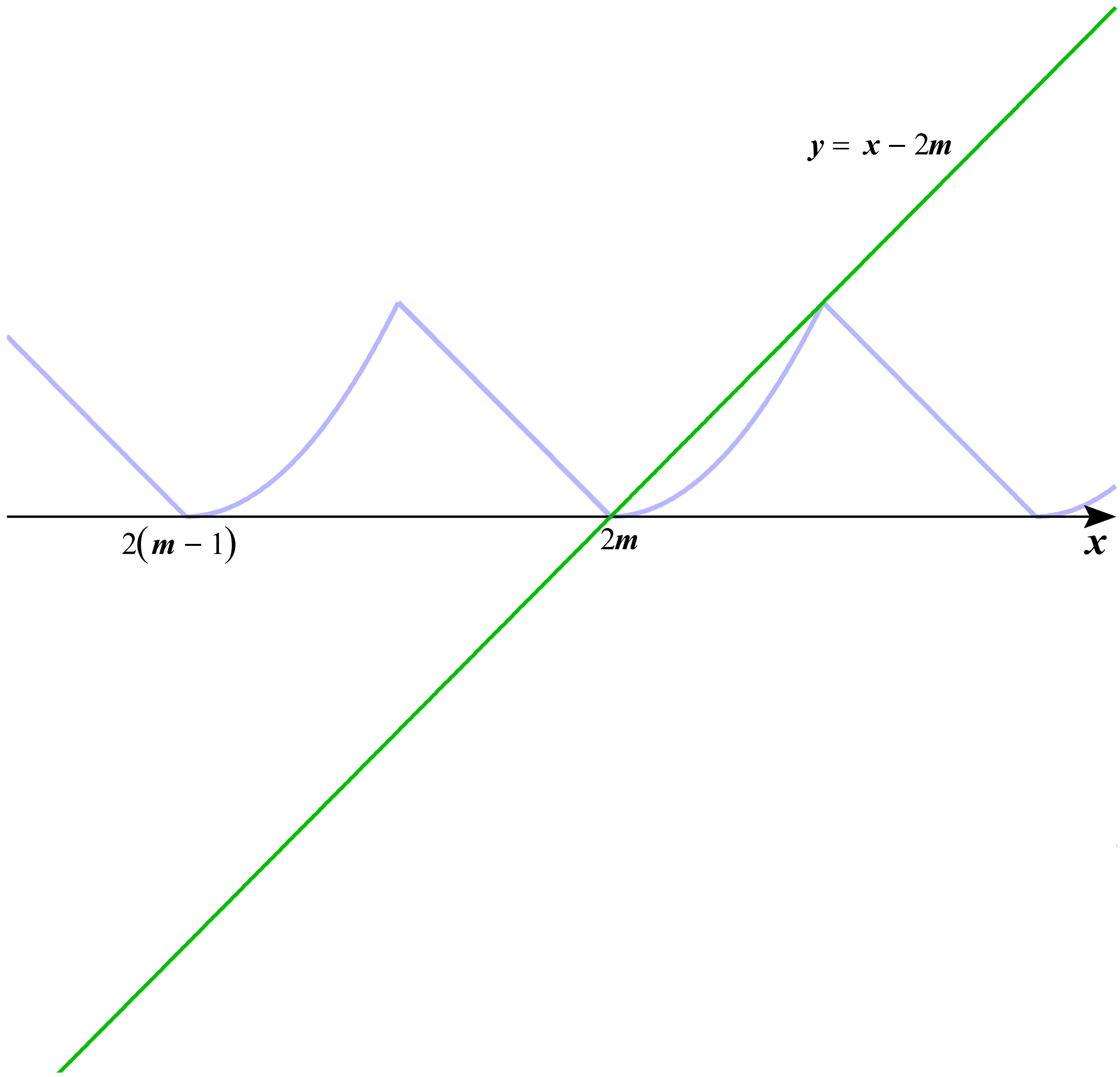
(2)

m を自然数とする。

$k=2m$ のとき

$$m\int_0^2 f(x)dx=m\left(\int_0^1 x^2dx+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)=\frac{5}{6}m$$

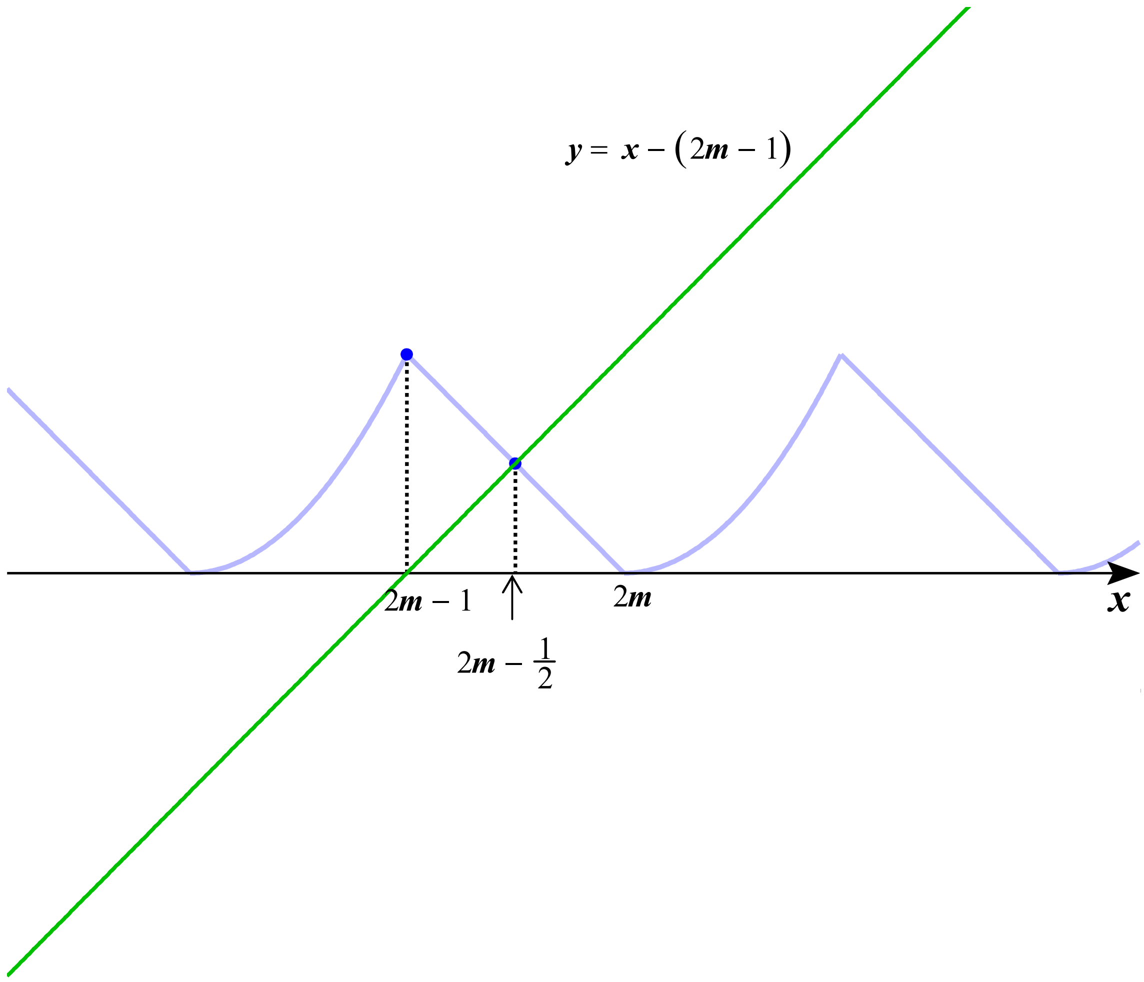
これと $m=\frac{k}{2}$ より， $S(k)=\frac{5}{12}k$



$k=2m-1$ のとき

$$m\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{6}m-\frac{1}{4}$$

これと $m=\dfrac{k+1}{2}$ より，$S(k)=\dfrac{5k+2}{12}$



(3)

$S(9)=\dfrac{47}{12}<4$， $S(10)=\dfrac{50}{12}>4$ より， $S(9)<4<S(10)$

よって， $9<k<10$

これと $4=S(10)-\dfrac{1}{6}$ より，

下図の直角二等辺三角形 ΔABC の面積が $\dfrac{1}{6}$ となるような k の値を求めればよい。

よって， $\dfrac{1}{2}(10-k)\left(\dfrac{10+k}{2}-k\right)=\dfrac{1}{6}$ （$9<k<10$）より， $k=10-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$